

# Quesiti di Analisi Matematica A

Presentiamo una raccolta di quesiti per la preparazione alla prova orale del modulo di Analisi Matematica A. Per una buona preparazione é consigliabile rispondere ad alta voce. Curare anche la precisione delle risposte. I quesiti con \* potranno essere oggetto di domanda nel corso della prova scritta.

## 1 Insiemi e strutture numeriche

1. Dati due insiemi  $A$  e  $B$ , cosa significa che  $A$  è sottoinsieme di  $B$ ?\*
2. Che cos'è una funzione ?
3. Che cosa significa che una funzione è iniettiva (suriettiva)?\*
4. Che cos'è l'immagine di una funzione?\*
5. Che cos'è una biiezione?\*
5. Che cosa si intende per funzione inversa di una biiezione?\*
6. Che cosa si intende per composizione di due funzioni?\*
7. Sotto quali condizioni si può definire?\*
8. Che cosa si intende per unione di due insiemi?\*
9. Che cosa si intende per intersezione di due insiemi?\*
10. Che cosa si intende per differenza di due insiemi?\*
11. Che cosa si intende per prodotto cartesiano di due insiemi?\*
12. Quali sono gli assiomi algebrici di campo?
13. Ne conoscete qualche conseguenza importante?
14. Quali sono gli assiomi di ordine per  $\mathbf{R}$ ?
15. Quali sono gli elementi di  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{Z}$ ,  $\mathbf{Q}$ ?
16. Che cosa si intende per minimo (massimo) di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ ?\*
17. Che cosa si intende per maggiorante (minorante) di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ ?\*
18. Sapreste fare qualche esempio?
19. Che cosa vuol dire che un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  è superiormente (inferiormente) limitato?\*

20. Che cosa vuol dire che un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$  è limitato?\*
21. In cosa consiste l'assioma dell'estremo superiore?\*
22. Come si definisce il valore assoluto di un numero reale?
23. Quali sono le sue principali proprietà ?
24. Come si definiscono le potenze a esponente naturale di un numero reale?
25. Come si definiscono le potenze a esponente intero di un numero reale non nullo?
26. Come si definisce la radice  $n$ -esima di un numero reale non negativo?\*
27. Come si definiscono le potenze a esponente razionale di un numero reale positivo?\*
28. Quali sono le principali proprietà delle potenze ?
29. In ciascuno dei casi precedenti sapreste spiegare le limitazioni poste sulla base per poter definire la potenza?
30. Sapreste discutere l'equazione  $x^n = a$ , con  $n \in \mathbf{N}$  e  $a \in \mathbf{R}$ ?\*
31. Sapreste discutere la generica equazione algebrica di secondo grado in  $\mathbf{R}$ ?
32. Come si definiscono le potenze a esponente reale dei numeri reali positivi?\*
33. Quali sono le principali proprietà delle funzioni esponenziali?
34. Quali sono le principali proprietà dei logaritmi?
35. Sapreste tracciare i grafici qualitativi di esponenziali e logaritmi?
36. Sapreste tracciare i grafici qualitativi delle funzioni potenza?
37. Che cosa sono i numeri complessi ? Specificare l'insieme di base e definire le operazioni.\*
38. Quali sono le loro principali proprietà algebriche?
39. In che senso i complessi sono un'estensione dei reali?
40. Come si definisce il coniugato di un numero complesso?
41. Quali sono le principali proprietà del complesso coniugato?
42. Che cosa si intende per valore assoluto di un numero complesso?\*
43. Quali ne sono le principali proprietà ?
44. Come si definisce la lunghezza di un arco di circonferenza?
45. Come si definiscono le funzioni  $\sin$  e  $\cos$ ?\*
46. Quali sono le principali proprietà di  $\sin$  e  $\cos$ ?
47. Come si definisce  $e^{ix}$  con  $x \in \mathbf{R}$ ?
48. Dati  $n \in \mathbf{N}$  e  $v \in \mathbf{C}$ , quali sono le soluzioni dell'equazione  $z^n = v$ ?\*
49. Sapreste dire come si arriva alla formula risolutiva?
50. Discutere l'equazione algebrica di secondo grado in  $\mathbf{C}$ .

## 2 Funzioni reali di una variabile reale

1. Che cosa vuol dire che una funzione è inferiormente (superiormente) limitata?\*
2. Che cosa vuol dire che una funzione è limitata?
3. Che cosa si intende per estremo inferiore (superiore) di una funzione (specificare bene quando esiste)?\*
4. Che cosa si intende per minimo (massimo) di una funzione?\*
5. Che cosa vuol dire che una funzione è monotona non decrescente (non crescente)?\*
6. Che cosa vuol dire che una funzione è crescente (decrescente)?\*
7. Sapreste applicare le precedenti definizioni alle funzioni potenza, logaritmo, esponenziali e trigonometriche?
8. Che cos'è un punto di accumulazione per un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ ?\*
9. Definire con precisione la scrittura  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$  nel caso di  $x_0$  e  $l$  reali (specificare dove deve stare  $x_0$ ).\*
10. In cosa consiste il teorema di unicità del limite?
11. Quali sono i principali risultati su limiti di somme, prodotti, quozienti?
12. Definire con precisione la scrittura  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty$  nel caso di  $x_0$  reale (specificare dove deve stare  $x_0$ ).\*
13. Come si estendono i risultati su limiti di somme, prodotti, quozienti nel caso in cui si abbia a che fare con funzioni che tendono a  $\pm\infty$ ?
14. Come si definisce  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  ( $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ )? Precisare bene le condizioni sul dominio di  $f$ .\*
15. Che cosa si intende per punto di accumulazione e per derivato generalizzato?
16. Qual è la definizione generale di limite che incorpora tutte le precedenti?
17. Che cosa si intende per restrizione di una funzione?
18. Che cosa si può dire sul limite di una restrizione?
19. Sotto quali condizioni dall'esistenza del limite della restrizione si può dedurre l'esistenza del limite della funzione?
20. Che cosa si intende per  $\lim_{x \rightarrow x_0^\pm} f(x)$ ? (precisare bene sotto quali condizioni si possono definire). \*
21. Quando esistono entrambi i limiti per  $x \rightarrow x_0 \pm$  cosa si può dire sull'esistenza del limite?\*
22. Che cosa si intende con la scrittura  $f = o(g)$  ( $x \rightarrow x_0$ )? (precisare bene sotto quali condizioni si può definire). \*

23. Quali sono le principali proprietà di questa relazione?
24. Come si definisce la continuità di una funzione in  $x_0$  ? Precisare dove deve stare  $x_0$ ?\*
25. Che legame c'è tra continuità e limite?\*
26. Quali relazioni ci sono tra continuità e le operazioni algebriche standard?
27. Come si definisce la funzione "tangente"?\*
28. Quali sono i principali risultati sul limite di una funzione composta?
29. Che cosa si può dire sulla composizione di funzioni continue?
30. Che cosa si intende per frontiera di un sottoinsieme di  $\mathbf{R}$ ?\*
31. Che cosa si intende per insieme chiuso?\*
32. Cosa dice il teorema di Weierstrass?\*
33. Che cos'è un intervallo?\*
34. Che cosa dice il teorema di Bolzano?\*
35. Conoscete un teorema di continuità della funzione inversa?\*
36. L'inversa di una funzione continua è sempre continua? Conoscete un controesempio?
37. Come si definisce la funzione "arcoseno"?\*
38. Come si definisce la funzione "arcocoseno"?\*
39. Come si definisce la funzione "arcotangente"?\*
40. Come si definisce il numero  $e$ ?
41. Che cos'è una successione?
42. Conoscete qualche risultato sui limiti di successioni monotone?\*

### 3 Calcolo differenziale per funzioni di una variabile reale

1. Come si definisce la derivata ? \* (Precisare bene tutte le condizioni richieste)
2. Che cosa vuol dire che una funzione è derivabile?
3. Che cosa vuol dire che una funzione ammette derivata destra (sinistra)?  
\* (Precisare bene tutte le condizioni richieste)
4. Che legame c'è tra derivabilità e continuità ?\*
5. Come si calcolano le derivate di somme, prodotti, quozienti?
6. Conoscete un teorema di derivazione di una funzione composta?\*
7. Conoscete un teorema di derivazione di funzione inversa?\*
8. Sapreste utilizzare il teorema precedente per calcolare la derivata di alcune funzioni importanti?

9. Cosa si intende per punto di minimo (massimo) relativo?\*
10. Cosa si può dire della derivata in un punto di minimo (massimo) relativo? (Precisare bene tutte le condizioni richieste)
11. Sapreste esibire degli esempi che mostrino che le ipotesi relative alla risposta precedente non sono superflue?
12. Che cosa dice il teorema di Rolle?\*
13. Che cosa dice il teorema di Cauchy?\*
14. Che cosa dice il teorema di Lagrange?\*
15. Che cosa si può dire della derivata di una funzione monotona? (Precisare bene tutte le condizioni richieste)
16. Conoscete dei risultati che permettano di ottenere informazioni sulla monotonia da informazioni sulla derivata?\*
17. Relativamente alla risposta precedente, si può eliminare l'ipotesi che il dominio sia un intervallo?
18. Conoscete dei risultati che permettano di ottenere informazioni sulla monotonia stretta da informazioni sulla derivata?\*
19. Si possono invertire?
20. Come si definiscono le derivate di ordine superiore?
21. Che cosa vuol dire che una funzione è derivabile  $n$  volte?\*
22. Che cosa vuol dire che una funzione è di classe  $C^n$ ?\*
23. Sapete enunciare i teoremi di L'Hopital?\*
24. Nell'ipotesi che non esista il limite del quoziente delle derivate, si può dire che non esiste il limite del quoziente delle funzioni di partenza?
25. In cosa consiste la formula di Taylor?\*
26. Cosa vuol dire che una funzione è convessa? (Precisare come deve essere il dominio)\*

## 4 Integrale di Riemann per funzioni di una variabile reale

1. Che cosa si intende per scomposizione di un intervallo? \*
2. Che cosa si intende per somma superiore (inferiore) relativa alla funzione  $f$  e alla scomposizione  $\sigma$ ? (precisare bene le ipotesi su  $f$ )\*
3. Che cosa si intende per integrale superiore (inferiore)?\*
4. Che relazione c'è tra l'integrale inferiore e l'integrale superiore?
5. Quando si dice che una funzione è integrabile?\*
6. In cosa consiste il criterio di integrabilità di Riemann?\*
7. Conoscete delle condizioni sufficienti per l'integrabilità di una funzione?\*

8. Che cosa vuol dire che una funzione è uniformemente continua?
9. Che cosa dice il teorema di Heine-Cantor?
10. Conoscete qualche esempio di funzione continua, ma non uniformemente continua?
11. Che cosa sapete dire sull'integrabilità di somme, prodotti, quozienti?
12. Che cosa dice il teorema della media integrale?\*
13. Che cosa dice il teorema fondamentale del calcolo integrale?\*
14. Che cosa si intende per primitiva di una funzione?\*
15. Quali funzioni possiedono sicuramente delle primitive?
16. Che relazione c'è tra primitive della stessa funzione?\*
17. Nota una primitiva di una funzione continua, come si può calcolare l'integrale?\*
18. Come segue il risultato precedente dal teorema fondamentale?
19. In cosa consiste la formula di integrazione per sostituzione?\*
20. In cosa consiste la formula di integrazione per parti?\*

## 5 Serie

1. Che cosa si intende per serie associata alla successione  $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ ?\*
2. Che cosa significa che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente?\*
3. Sapete discutere la convergenza di una serie geometrica?
4. Se si sa che la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  è convergente, che cosa si può dire di  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n$ ?
5. L'enunciato si può invertire?
6. Qual è la principale proprietà delle serie a termini non negativi?\*
7. In cosa consiste il criterio del confronto?\*
8. In cosa consiste il criterio della radice?\*
9. In cosa consiste il criterio del rapporto?\*
10. Per quali  $\alpha \in \mathbf{R}$  converge la serie  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ ?\*
11. Quale ulteriore criterio di convergenza se ne può trarre?
12. Che cosa vuol dire che una serie è assolutamente convergente?\*
13. Che relazione c'è tra convergenza e assoluta convergenza?\*
14. In cosa consiste il criterio di Leibniz?\*
15. Che cosa si intende per sviluppo decimale di un numero reale non negativo?
16. Che cosa vuol dire che  $\mathbf{Q}$  e  $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$  sono densi in  $\mathbf{R}$ ?